

Die elektrischen Elementarwellen.

Von

L. Flamm.

Aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Wien.

Mit 25 Abbildungen.

(Eingelangt am 2. April 1946. Vorgelegt in der Sitzung am 27. Juni 1946.)

Überblick über die gewonnenen Ergebnisse.

In Erweiterung der Elektronentheorie wird eine neue Theorie der Elektrizität aufgestellt, *die Theorie der elektrischen Elementarfelder*. Es werden dabei als elektrische Elementarfelder die Quellenfelder der elektrischen Elementarladungen bezeichnet, welche als unteilbare und unzerstörbare Feldbausteine sich überlagern. Das elektrische Elementarfeld, mit *Maxwellschen* Spannungen und Massendichte behaftet, bedeutet eine besondere Form der Materie, welche leicht durchdringlich ist und Transversalwellen mit Lichtgeschwindigkeit längs der elektrischen Feldlinien fortpflanzt, die als elektrische Elementarwellen bezeichnet werden. Die Feldlinienröhren der elektrischen Elementarfelder zeigen ein analoges Verhalten wie schwingende Saiten, deren Differentialgleichung sie in voller Strenge genügen. Die elektrischen Feldlinien beschreiben bei diesen Schwingungen Bahnflächen, dabei ist der Vektor der Flächengeschwindigkeit der elektrischen Erregung die magnetische Feldstärke. Es hat demnach nur das elektrische Feld materielle Existenz, während das Magnetfeld bloß ein kinematisches Bestimmungsstück der elektrischen Feldlinien darstellt, analog wie die Geschwindigkeit bei der Bewegung eines Massenpunktes. Man hat es bei den Schwingungen der elektrischen Feldlinienröhren mit einer eigenartigen Linienmechanik an Stelle der Punktmechanik zu tun. Bei Auftreten einer elektrischen Elementarwelle tritt zum statischen elektrischen Elementarfeld ein transversales Zusatzfeld hinzu und durch die Bewegung der elektrischen Feldlinien auch ein transversales Magnetfeld. Diese beiden dynamischen Zusatzfelder stellen die uns bisher geläufige elektromagnetische Welle dar.

So bedeutet also die elektromagnetische Welle bloß einen Bestandteil einer unserer mechanischen Vorstellung geläufigeren Wellenart, der elektrischen Elementarwelle, die für die elektrischen Feldlinienröhren den Transversalwellen der schwingenden Saite vollkommen entspricht. Dieselben elektrischen Elementarwellen erweisen sich auch als der Mechanismus, durch den die Grundgesetze der *Maxwellschen* Elektrodynamik zustandegebracht werden. Nach einem solchen hatten schon *Maxwell* und andere, aber vergebens, gesucht. Auch der *Fresnelsche* Lichtäther als durchdringliche Substanz mit den Elastizitäts- und Trägheitseigenschaften eines festen Körpers erschließt sich unserem Verständnis völlig klar, wenn wir ihn als die Gesamtheit der elektrischen Elementarfelder deuten. Der in der Quantenmechanik auftretende Dualismus Korpuskel—Welle, dessen Ursache sich unserem Verständnis bisher entzog, erhält schließlich durch die Verbundenheit von Elementarladung und zugehörigem atomarem elektrischem Elementarfeld als Träger elektrischer Elementarwellen eine geeignete modellmäßige Deutung.

Die elektrischen Elementarwellen.

Wir gehen aus von *Faradays* Darstellung elektrischer und magnetischer Felder durch Feldlinien. Nach *Faradays* Vorstellungen treten auch Spannungen auf in diesen Feldern, eine Zugspannung in der Richtung der

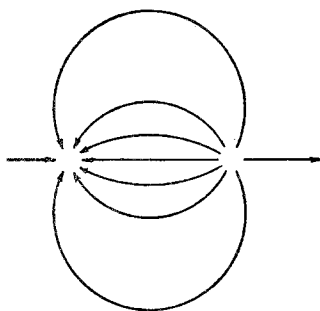


Abb. 1. Elektrisches Feld gleicher Ladungen von ungleichem Vorzeichen.

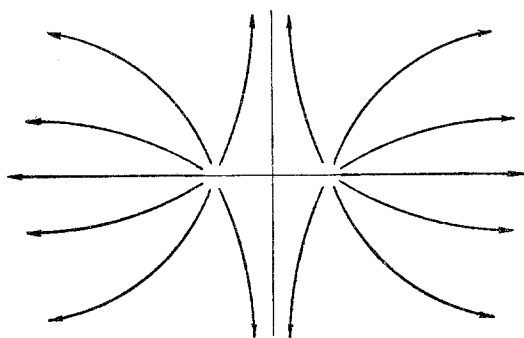


Abb. 2. Elektrisches Feld gleicher Ladungen von gleichem Vorzeichen.

Feldlinien, eine Druckspannung senkrecht zu ihnen. Sie vermitteln die Anziehung oder Abstoßung elektrischer Ladungen bzw. elektrischer Ströme, wie man den ersten vier Abbildungen entnehmen kann. Diese in den Feldern auftretenden Spannungen führen den Namen *Maxwellsche* Spannungen. Ihr Betrag ist gleich der Energiedichte des betreffenden Feldes.

Nach dem *Einsteinschen* Äquivalentsatz von Energie und Masse

$$E = m c^2 \quad (1)$$

unterscheiden sich Energie E und Masse m nur durch die Maßeinheit. Ihre Maßzahlen sind bloß um einen Faktor verschieden, der eine Potenz der Vakuumlichtgeschwindigkeit c ist. Nicht anders verhalten sich die Maßzahlen elektrischer oder magnetischer Größen im elektrostatischen und

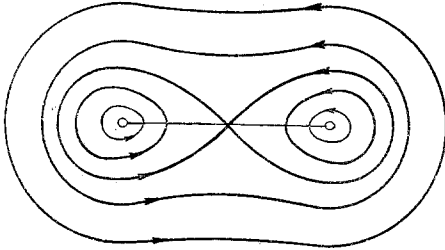


Abb. 3. Magnetfeld gleicher paralleler Ströme derselben Orientierung.

im elektromagnetischen Maßsystem. Daß Masse Energie bedeutet, ist heute wohl jedermann durch die Atombombe zur schrecklichen Gewißheit geworden. Die Äquivalenz dieser Größen bedeutet aber auch umgekehrt, daß jeder Energie Massenträgheit zukommt. Die Energiedichte der Felder hat demnach auch eine Massendichte derselben zur Folge. Mit

seinen Spannungen und seiner Massendichte besitzt das Feld die Eigenschaften eines elastischen Mediums, nur daß ihm die Eigenschaft der Undurchdringlichkeit des festen Körpers abgeht, da sich die Felder superponieren. Aber transversale Wellen kann das Feld fortpflanzen wie ein fester Körper als Folge seiner Spannungen und seiner Trägheit.

Nach der Elektronentheorie werden alle elektromagnetischen Erschei-

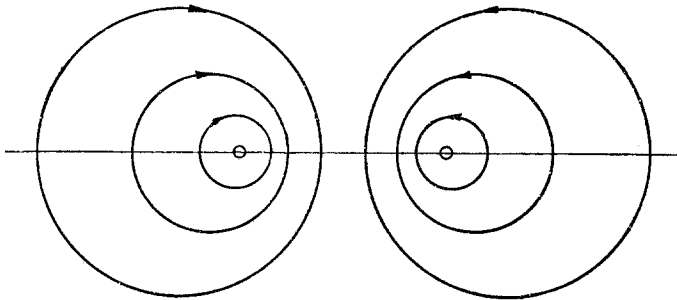


Abb. 4. Magnetfeld gleicher paralleler Ströme entgegengesetzter Orientierung.

nungen auf Elektronen und ihre Felder zurückgeführt. In zwangläufiger Erweiterung der Elektronentheorie muß man aber noch weiter voraussetzen, daß nicht nur jede Ladung aus elektrischen Elementarladungen sich aufbaut, sondern auch jedes elektrische Feld aus überlagerten elektrischen Elementarfeldern besteht. Und zwar bedeutet ein elektrisches Elementarfeld das zu einer elektrischen Elementarladung gehörige Quellenfeld. Jedes dieser elektrischen Elementarfelder muß als ein selbständiges elastisches Feldmedium betrachtet werden. Das Elementarfeld einer

positiven Elementarladung ist durch Abb. 5, das der negativen Elementarladung durch Abb. 6 dargestellt. Die Abb. 1 und 2 stellen resultierende Felder aus überlagerten elektrischen Elementarfeldern dar. Die Energie-

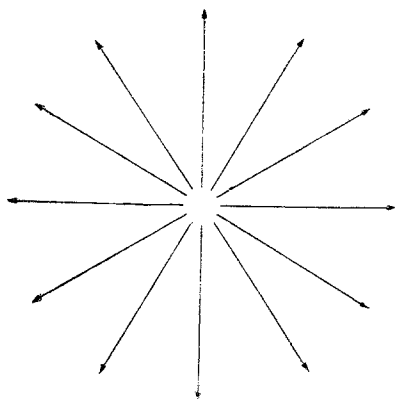


Abb. 5.

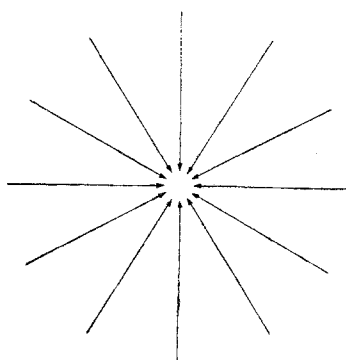


Abb. 6.

dichte des resultierenden Feldes ist an jeder Stelle die Summe aus den Energiedichten der Elementarfelder und aus einer wechselseitigen Energiedichte derselben, welche auch negativ sein kann. Trotz ihrer Brauchbarkeit zur Kräfteermittlung muß man dennoch den resultierenden Feldern eine rein formale Bedeutung zuschreiben, während man die elektrischen



Abb. 7. Ungestörte D-Linien.

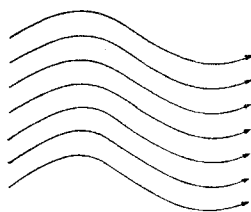


Abb. 8. Gestörte D-Linien.

Elementarfelder stets als die zugrunde liegende physikalische Realität anzusehen hat.

Weit weg vom Ladungszentrum, in Gebieten, deren Ausdehnung klein ist gegen den Abstand vom Ladungszentrum, kann das elektrische Elementarfeld als homogenes elektrisches Feld dargestellt werden, Abb. 7. In ihm sind die elektrischen Feldlinien parallele äquidistante Gerade. Nach *Faradays* Vorstellungen gleichen die Feldlinienröhren gespannten Gummischnören oder Saiten, diese haben die Fähigkeit, transversale Wellen fortzupflanzen. Die gleiche Eigenschaft müssen die Feldlinienröhren haben.

Nur treten sie im homogenen elektrischen Elementarfeld nicht isoliert auf, sondern es folgt dicht aneinander gefügt Feldlinienröhre auf Feldlinienröhre. Wirken aber auf das ganze Feldlinienröhrenbündel Ver-

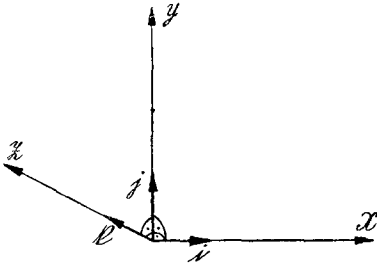


Abb. 9.

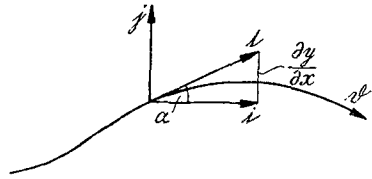


Abb. 10.

schiebungen oder Kräfte in kongruenter Weise ein, dann laufen ebene Wellen durch das elektrische Elementarfeld mit Wellenebenen senkrecht zu den Feldlinien, Abb. 8.

Wir wollen sie ebene elektrische Elementarwellen nennen. Insbesondere werden elektrische Elementarwellen in einem Gebiet eines homogenen elektrischen Elementarfeldes eben sein, wenn ihr Erregungszentrum in der Zentralladung des elektrischen Elementarfeldes gelegen war. Wir bedienen uns nunmehr der Koordinatendarstellung nach

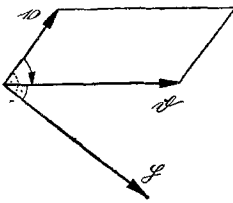


Abb. 11.



Abb. 12.

Abb. 9. Im homogenen, statischen elektrischen Elementarfeld, Abb. 7, kann man den Vektor der elektrischen Erregung \mathfrak{D} durch die Formel

$$\mathfrak{D}^0 = D_0 \mathbf{i} \tag{2}$$

darstellen, worin D_0 eine Konstante bedeutet. Haben die Wellenlinien der Abb. 8 die Gleichung

$$y = y(x, t) \tag{3}$$

mit der Richtungstangente

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}, \tag{4}$$

so lautet gemäß Abb. 10 die Formel für die elektrische Erregung

$$\mathfrak{D} = D_0 \mathbf{t} \tag{5}$$

mit dem Tangentialvektor

$$t = i + \frac{\partial y}{\partial x} j; \tag{6}$$

denn nur ein transversales elektrisches Zusatzfeld verbürgt die notwendige Erhaltung der Ladungsfreiheit.

Im Gegensatz zur bisherigen Elektrodynamik nehmen wir aber an, daß nur das elektrische Feld eine selbständige reale Existenz besitzt, nicht aber das magnetische Feld, welches bloß ein dynamisches Bestimmungsstück des elektrischen Feldes darstellt. Die magnetische Feldstärke \mathfrak{H} ist demnach bestimmt als Vektor der Flächengeschwindigkeit des D -Vektors, was durch die Formel ausgedrückt wird (Abb. 11)

$$\mathfrak{H} = [v \mathfrak{D}]. \tag{7}$$

Die Orientierung des H -Vektors erfolgt nach der Seite des von v und \mathfrak{D} erzeugten Parallelogramms, von der aus gesehen die kürzeste Verdrehung der v -Richtung in die D -Richtung im Sinne von Abb. 12 die positive ist. Infolge der Flächengleichheit

$$ABCD = ABEF = AGHF$$

in Abb. 13 kann man statt (7) auch schreiben

$$\mathfrak{H} = -D_0 \frac{\partial y}{\partial t} k. \tag{8}$$

Der Ausdruck $\frac{\partial y}{\partial t}$ bedeutet die Transversalgeschwindigkeit der D -Linien.

Wir greifen nun eine elektrische Feldlinienröhre heraus, der Einfachheit halber vom rechteckigen Querschnitt q , gemäß Abb. 14a. Wir betrachten immer nur Stücke der elektrischen Feldlinienröhre zwi-

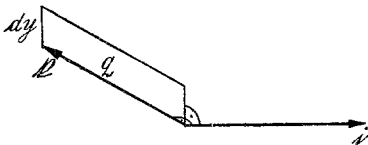


Abb. 14 a.

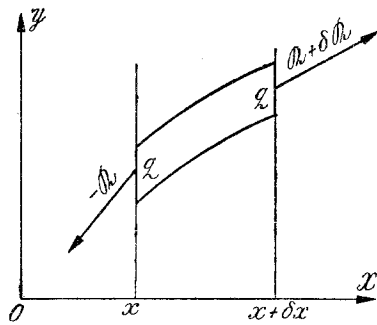


Abb. 14 b.

sehen zwei XZ -Ebenen, wie in Abb. 14b gezeichnet. Dann kompensiert sich unter den Verhältnissen der Abb. 8 der Druck auf die Mantel-

fläche, so daß man nur die Kräfte auf den Schnittflächen vom Querschnitt q in Rechnung zu stellen hat. In dieser Hinsicht herrscht also Analogie zur üblichen Behandlung des Problems der schwingenden Saite. Im Gegensatz hiezu läßt sich aber die Berechnung der Schwingungen der elektrischen Feldlinienröhre in voller Strenge ohne jede Vernachlässigung durchführen.

Neben dem Tangentialvektor (6) an die D -Linie spielt auch deren Normalvektor

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{j} - \frac{\partial y}{\partial x} \mathfrak{i} \quad (9)$$

gemäß Abb. 15 eine wichtige Rolle. Der Betrag der *Maxwellschen* Spannung ist, wie schon eingangs erwähnt, gleich der Energiedichte des

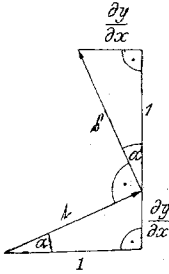


Abb. 15.

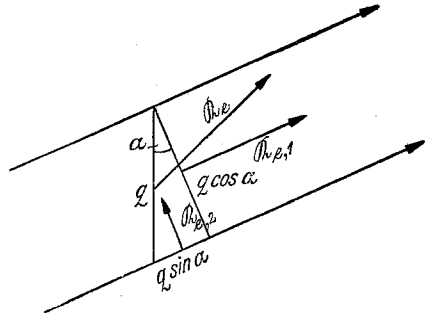


Abb. 16.●

Feldes. Sie tritt als reine Zugspannung für senkrecht zu den Feldlinien, als reine Druckspannung für parallel zu den Feldlinien liegende Flächen auf. Man folgert sie daraus auch für anders orientierte Flächen. So hat man nach Abb. 16 die vom elektrischen Feld herrührende Kraft auf die Schnittfläche q in der aus der Elastizitätstheorie bekannten Weise nach der Formel zu berechnen

$$\mathfrak{R}_e = \mathfrak{R}_{e,1} + \mathfrak{R}_{e,2}.$$

Mittels der Energiedichte w_e des elektrischen Feldes berechnet man

$$\mathfrak{R}_{e,1} = w_e q \cos \alpha \mathfrak{t}_1,$$

$$\mathfrak{R}_{e,2} = w_e q \sin \alpha \mathfrak{s}_1,$$

wobei \mathfrak{t}_1 den Einheitsvektor in der Richtung von \mathfrak{t} und \mathfrak{s}_1 den Einheitsvektor in der Richtung von \mathfrak{s} bedeutet. Der Abb. 15 kann man entnehmen

$$\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t} \cos \alpha, \quad (10)$$

$$\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s} \cos \alpha. \quad (11)$$

Daraus folgt weiter

$$\mathfrak{R}_{e,1} = w_e q t \cos^2 \alpha,$$

$$\mathfrak{R}_{e,2} = w_e q \dot{s} \sin \alpha \cos \alpha$$

oder auch

$$\mathfrak{R}_{e,2} = w_e q \dot{s} \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha.$$

So ergibt sich also

$$\mathfrak{R}_e = w_e q \cos^2 \alpha \left\{ t + \frac{\partial y}{\partial x} \dot{s} \right\}. \quad (12)$$

Für das magnetische Feld, das ja tangential zur Schnittfläche q liegt, ergibt sich, mittels der Energiedichte w_m des magnetischen Feldes, als Kraft auf die Schnittfläche q

$$\mathfrak{R}_m = -w_m q i. \quad (13)$$

Mittels der Dielektrizitätskonstante ε berechnet man

$$w_e = \frac{D^2}{2\varepsilon} \quad (14)$$

und mittels der magnetischen Permeabilität μ

$$w_m = \frac{\mu H^2}{2}. \quad (15)$$

Nach (5) kann man für (14) auch schreiben

$$w_e = \frac{D_0^2}{2\varepsilon} (t^2).$$

Man erhält so aus (12)

$$\mathfrak{R}_e = \frac{D_0^2}{2\varepsilon} (t^2) q \cos^2 \alpha \left\{ t + \frac{\partial y}{\partial x} \dot{s} \right\}.$$

Nach (10) ist aber

$$(t^2) \cos^2 \alpha = (t_1^2) = 1,$$

so daß man schließlich bekommt

$$\mathfrak{R}_e = \frac{D_0^2}{2\varepsilon} q \left\{ t + \frac{\partial y}{\partial x} \dot{s} \right\}. \quad (16)$$

Nach (8) kann man für (15) auch schreiben

$$w_m = \frac{\mu D_0^2}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2,$$

so daß man für (13) schließlich erhält

$$\mathfrak{R}_m = -\frac{\mu D_0^2}{2} q \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 i. \quad (17)$$

Für die Gesamtkraft

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_m \quad (18)$$

auf die Schnittfläche q ergibt sich demnach

$$\mathfrak{R} = \frac{D_0^2 q}{2\varepsilon} \left\{ 1 + \frac{\partial y}{\partial x} \dot{s} - \varepsilon \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 i \right\}. \quad (19)$$

Für die in Abb. 14b um δx auseinander liegenden Schnittflächen hat man noch weiter zu berechnen

$$\delta \mathfrak{R} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} \delta x.$$

Das stellt die resultierende Kraft auf das herausgegriffene Stück der betrachteten elektrischen Feldlinienröhre dar, welche das Volumen $q \cdot \delta x$ hat. Für die Kraftdichte

$$\mathfrak{k} = \frac{\delta \mathfrak{R}}{q \delta x}$$

ergibt sich so die Formel

$$\mathfrak{k} = \frac{1}{q} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x}. \quad (20)$$

Aus (19) berechnet man

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} = \frac{D_0^2 q}{2 \varepsilon} \left\{ \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \bar{s} - 2 \varepsilon \mu \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} i \right\}. \quad (21)$$

Aus (6) folgt

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} i$$

und aus (9) ergibt sich

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial x} = - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} i.$$

Man findet mithin

$$\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left\{ i - \frac{\partial y}{\partial x} i \right\}$$

oder kürzer geschrieben nach (9)

$$\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \bar{s}.$$

Daher schreibt sich (21) einfacher

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} = \frac{D_0^2 q}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \bar{s} - \varepsilon \mu \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} i \right\}.$$

Aus (9) folgert man auch

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = - \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} i$$

und so ergibt sich für (20) schließlich die Darstellung

$$\mathfrak{k} = \frac{D_0^2}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \bar{s} + \varepsilon \mu \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} \right\}. \quad (22)$$

Die Formel für die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes schreibt sich

$$\mathfrak{g} = \mu [\mathfrak{D} \mathfrak{H}] \quad (23)$$

und wird durch die Abb. 17 dargestellt. Zuzufolge (5) und (8) erhält man weiter

$$g = -\mu D_0^2 \frac{\partial y}{\partial t} [f t],$$

d. i.

$$g = \mu D_0^2 \frac{\partial y}{\partial t} [f t].$$

Aus (6) und (9) folgert man

$$[f t] = \hat{s}, \tag{24}$$

so daß man kürzer schreibt

$$g = \mu D_0^2 \frac{\partial y}{\partial t} \hat{s}. \tag{25}$$

Man folgert daraus

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \mu D_0^2 \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \hat{s} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \hat{s}}{\partial t} \right\}. \tag{26}$$

Die dynamische Grundgleichung des Feldes hat die einfache Gestalt

$$\frac{\partial g}{\partial t} = f. \tag{27}$$

Aus (22) und (26) folgt demnach

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{28}$$

Sie hat die Form der Differentialgleichung der schwingenden Saite. Ihr sind die Schwingungen der elektrischen Feldlinienröhren unterworfen. Es stellt der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ein Maß für die Krümmung der *D*-Linien dar, während

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

deren Transversalbeschleunigung bedeutet. Die Differentialgleichung (28) fordert Proportionalität zwischen diesen beiden Größen. Mittels der bekannten Formel

$$\varepsilon \mu = \frac{1}{c^2} \tag{29}$$

läßt sich (28) vollends in der Gestalt der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{30}$$

schreiben. Ihr zufolge laufen die Wellen längs der Feldlinienröhren mit der Lichtgeschwindigkeit *c* fort. Demnach haben also die elektrischen Elementarwellen die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit wie die elektromagnetischen Wellen.

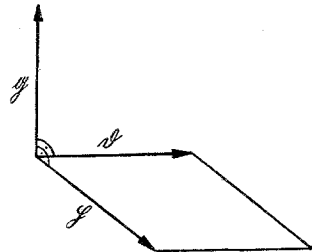


Abb. 17.

Differentialgleichung (30) hat die Lösung

$$y = f(x \mp ct), \quad (31)$$

worin f eine beliebige Funktion des Argumentes bedeutet. Man berechnet daraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x \mp ct),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mp c f'(x \mp ct).$$

Demzufolge ergeben die Gleichungen (5) und (6)

$$\mathfrak{D} = D_0 i + D_0 f'(x \mp ct) j \quad (32)$$

und Gleichung (8) liefert

$$\mathfrak{H} = \pm c D_0 f'(x \mp ct) k. \quad (33)$$

Durch die Gleichungen (32) und (33) ist das Feld der elektrischen Elementarwelle bestimmt.

Bezeichnen wir das zum homogenen elektrostatischen Elementarfeld (2) durch die elektrische Elementarwelle hinzutretende Zusatzfeld mit einem Stern, so erhält man

$$\mathfrak{D}^* = D_0 f'(x \mp ct) j, \quad (34)$$

$$\mathfrak{H}^* = \pm c D_0 f'(x \mp ct) k. \quad (35)$$

Man findet für dieses nach Formel (14)

$$w_e^* = \frac{D_0^2}{2\varepsilon} [f'(x \mp ct)]^2$$

und nach Formel (15)

$$w_m^* = \frac{\mu c^2 D_0^2}{2} [f'(x \mp ct)]^2.$$

Aus (29) folgt

$$w_e^* = w_m^*. \quad (36)$$

Die Formeln (34), (35) und (36) stellen aber nichts anderes als die bekannten Eigenschaften ebener elektromagnetischer Wellen dar. Diese sind somit das zum homogenen elektrostatischen Elementarfeld durch die ebene elektrische Elementarwelle hinzutretende Zusatzfeld. Im übrigen ist das elektrostatische Elementarfeld im allgemeinen durch andere elektrostatische Elementarfelder in seiner Wirkung nach außen kompensiert, so daß nur die elektromagnetische Welle zur Beobachtung kommt. So spielt also das elektrostatische Elementarfeld die Rolle eines verborgenen elektrischen Feldes der elektrischen Elementarwelle. Indem also das zu einer elektrischen Elementarladung zugehörige elektrostatische Elementarfeld die Fähigkeit besitzt, Wellen zu erzeugen, findet die von *E. Schrödinger* als Zentaurennatur bezeichnete Eigenschaft des Elektrons, Korpuskel und Welle zu sein, ihre natürliche Erklärung.

Die im voranstehenden entwickelte Theorie der Elektrizität, nach welcher das Magnetfeld keine selbständige physikalische Existenz besitzt, sondern bloß ein dynamisches Bestimmungsstück eines materieartigen elektrischen Feldes darstellt, liefert weiterhin auch die mechanische Begründung der *Maxwellschen* elektrodynamischen Grundgleichungen. Schon *Maxwell* selbst suchte eine mechanische Begründung mittels verborgener Friktionsrollen zu geben, *Boltzmann* ersann zu diesem Zwecke seine Bisyklemodelle, auch die *Hertz'sche* Mechanik entsprang solchen Bestrebungen. Sie drangen aber alle zusammen nicht durch, da sie zu gekünstelt erschienen. Die elektrischen Elementarwellen liefern den natürlichen Mechanismus zur Begründung der *Maxwellschen* Gleichungen; es werden ja alle elektromagnetischen Wirkungen durch das Feld vermittelt. Das homogene elektrische Elementarfeld kann natürlich nur die *Maxwellschen* Gleichungen im strom- und ladungsfreien Raum liefern.

Man nennt ein magnetisches Feld \mathfrak{H} dann ein Wirbelfeld, wenn beim Herumführen eines Magnetpols auf einem geschlossenen Weg Arbeit gewonnen wird. Auch bei parallelen Feldlinien liegt ein Wirbelfeld vor, wenn sie inhomogen sind, wie bei dem in Abb. 18 dargestellten Magnetfeld. Als Maß seiner Wirbelstärke, Rotation, gilt die beim Umlaufen der Flächeneinheit mit dem Einheitspol gewonnene Arbeit. Diese bestimmt den Betrag eines Vektors, im vorliegenden Falle $\text{rot } \mathfrak{H}$, dessen Richtung normal steht zu derjenigen Stellung der Flächeneinheit, bei der die maximale Arbeit gewonnen wird, und zwar nach derjenigen Seite der Fläche orientiert, von der aus der Umlauf im Sinne der Abb. 12 positiv gesehen wird. Für das in Abb. 18 strichlierte Rechteck ergibt sich demnach

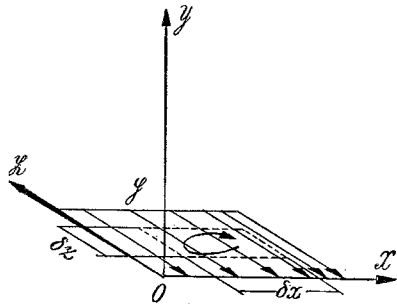


Abb. 18.

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{H_z \delta z - \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} \delta x \right) \delta z}{\delta x \delta z} \mathfrak{i},$$

d. i.

$$\text{rot } \mathfrak{H} = - \frac{\partial H_x}{\partial x} \mathfrak{i}.$$

Aus (8) entnimmt man

$$H_x = - D_0 \frac{\partial y}{\partial t}$$

und so ergibt sich

$$\text{rot } \mathfrak{H} = D_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \mathfrak{i}. \tag{37}$$

Andererseits erhält man aus (5) und (6)

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \mathfrak{i}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x},$$

und so folgt also

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \quad (\text{I}_0)$$

Maxwells erste Hauptgleichung des elektromagnetischen Feldes für ein stromfreies Gebiet.

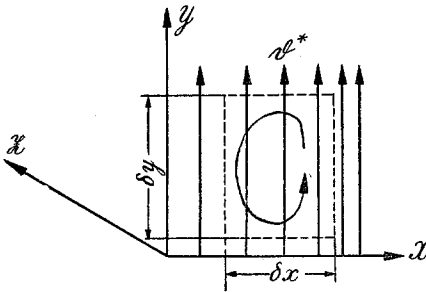


Abb. 19.

Ganz analog ermittelt man auch die Wirbel im elektrischen Felde. Hier ist das Maß der Wirbelstärke aber die beim Umlaufen der Flächeneinheit mit der Einheitsladung gewonnene Arbeit. Nur das transversale Zusatzfeld zum elektrostatischen Elementarfeld besitzt hier Wirbel und kann daher allein berücksichtigt werden. Für das in Abb. 19 strich-

lierte Rechteck ergibt sich demnach

$$\text{rot } \mathfrak{D} = \frac{-D_y^* \delta y + \left(D_y^* + \frac{\partial D_y^*}{\partial x} \delta x \right) \delta y}{\delta x \delta y} \mathfrak{i},$$

d. i.

$$\text{rot } \mathfrak{D} = \frac{\partial D_y^*}{\partial x} \mathfrak{i}.$$

Aus (2), (5) und (6) folgt

$$D_y^* = D_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

und so erhält man

$$\text{rot } \mathfrak{D} = D_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \mathfrak{i}. \quad (38)$$

Die Formel zeigt, daß die Krümmung der D -Linien die Wirbel hervorruft. Zufolge der Wellengleichung

$$(30) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

kann man umformen zu

$$\text{rot } \mathfrak{D} = \frac{1}{c^2} D_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mathfrak{i}.$$

Andererseits folgt aus (8)

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -D_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mathfrak{i}.$$

Auf diese Weise erhält man

$$\operatorname{rot} \mathfrak{D} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \quad (\text{II}_0)$$

Maxwells zweite Hauptgleichung des elektromagnetischen Feldes. Sie stellt das *Faradaysche* Induktionsgesetz dar, welches demnach durch die elektrischen Elementarwellen zustande kommt, welche auf eine Krümmung der *D*-Linien mit Transversalbeschleunigung, also zeitlicher Änderung des Magnetfeldes reagieren und umgekehrt.

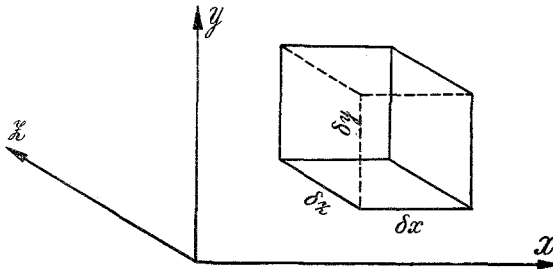


Abb. 20.

Die Anzahl der durch das Rechteck $\delta y \delta z$ hindurchtretenden *D*-Linien ist durch

$$D_x \delta y \delta z$$

gegeben. Diese treten in den in Abb. 20 gezeichneten Quader ein. Durch die, um δx verschobene, gegenüberliegende Rechtecksfläche tritt die Anzahl

$$\left(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z$$

wieder aus. Der Überschuß

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

bedeutet die im Quadvolumen $\delta x \delta y \delta z$ neu hinzutretenden *D*-Linien. Es ist demnach

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x}, \quad (39)$$

genannt Divergenz von \mathfrak{D} , die Quellergiebigkeit der Volumseinheit an *D*-Linien. Die erhaltene vereinfachte Formel gilt nur für den hier vorliegenden Spezialfall, daß das Feld bloß mit der einen räumlichen Variablen *x* variiert.

Nach den Formeln (5), (6) ergibt sich

$$D_x = D_0, \text{ (Konstante),}$$

so daß (39)

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0 \quad (\text{III}_0)$$

zur Folge hat. Auch sie gehört zu den *Maxwellschen* Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für ein ladungsfreies Gebiet.

Für das Magnetfeld gilt analog zu (39)

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x}.$$

Nach Gleichung (8) ist aber

$$H_x = 0$$

und so erhält man weiter

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \quad (\text{IV}_0)$$

noch eine *Maxwellsche* Gleichung des elektromagnetischen Feldes. Die erhaltenen Gleichungen (I_0) , (II_0) , (III_0) und (IV_0) stellen sämtliche *Maxwellschen* Differentialgleichungen der Elektrodynamik für ein strom- und ladungsfreies Gebiet dar¹.

Vor mehr als einem Jahrhundert konnte *Fresnel* mit einer mechanischen Wellentheorie des Lichtes große Erfolge erzielen. Er benötigte für die Ausbreitung des Lichtes ein hypothetisches, den ganzen Raum erfüllendes Medium, das er Lichtäther nannte, dem er die Elastizitäts- und Trägheitseigenschaften eines festen Körpers zuschreiben mußte, das aber der Bewegung der Himmelskörper keinen Widerstand entgegensetzen durfte. Solche Voraussetzungen erschienen den Zeitgenossen *Fresnels* zu widerspruchsvoll, als daß sie daran hätten glauben können. Indem wir aber nunmehr den *Fresnelschen* Lichtäther als die Gesamtheit der elektrischen Elementarfelder betrachten, fallen alle Widersprüche fort. Von diesem Gesichtspunkte aus ist es auch verständlich, daß man mittels der *Maxwellschen* Gleichungen nachher dieselben *Fresnelschen* Formeln für das Licht erhielt.

Die Schwierigkeiten für den *Fresnelschen* Lichtäther hatten sich nur daraus ergeben, daß man ihn aus nebeneinander liegenden Atomen aufgebaut sich vorstellte. Betrachtet man aber den *Fresnelschen* Lichtäther als Feldmaterie, die aus überlagerten elektrischen Elementarfeldern zusammengesetzt ist, so stellt seine Durchdringlichkeit keinen Widerspruch mehr dar. Als die atomaren Bestandteile des *Fresnelschen* Lichtäthers hat man im leeren Raum die elektrischen Elementarfelder anzusehen, welche in regelloser Orientierung sich überlagern, so daß im allgemeinen kein resultierendes elektrisches Feld zustande kommt. Diese durchdringliche Feldsubstanz besorgt aber die Fortpflanzung des Lichtes und vermittelt überhaupt alle elektromagnetischen Wirkungen durch seine Spannungen und seine Massenträgheit. Wie schon in *H. Weyls* „Raum-Zeit-Materie“ betont wird, kommt auch dem Feld die Eigenschaft der

¹ Bezüglich der verwendeten Einheiten und Formelgrößen vergleiche: *L. Flamm*, Algebraische Elektrodynamik. Wiener Ber. IIa, 144, 243—261 (1935).

Materie zu, mit Kraft und Masse zu reagieren. Nur undurchdringlich ist die Feldmaterie nicht. Aber auch für die aus Korpuskeln aufgebaute Materie ist die Undurchdringlichkeit nur dann gewährleistet, wenn die wirkende Kraft eine begrenzte ist. Bei genügend großer aufgewendeter Energie ist auch die Korpuskelmaterie durchdringlich. Eintretende Kernreaktionen können aber bei einem solchen Prozeß bleibende Veränderungen nach sich ziehen. Eine wesentliche Eigenschaft jeder Materie ist es aber auch, daß man ihr an jeder Stelle einen bestimmten Bewegungszustand zuschreiben kann. In der Art, diesen zu messen, muß man aber bei Korpuskelmaterie und Feldmaterie verschieden verfahren. Während die Bewegung der Korpuskelmaterie durch die Geschwindigkeit von Bahnkur-

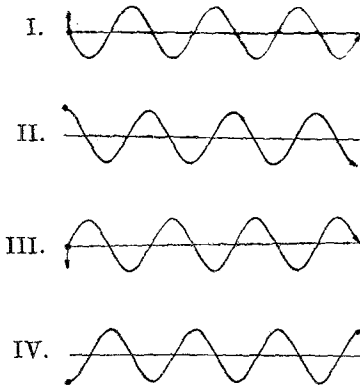


Abb. 21.

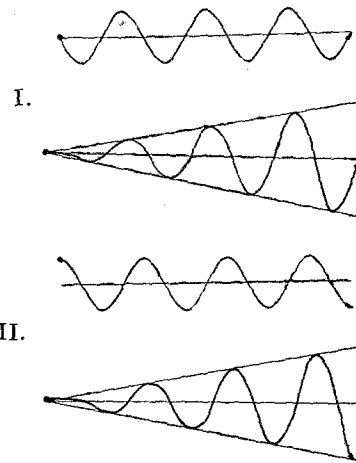


Abb. 22.

ven beschreibenden Massenpunkten angegeben wird, ist die Bewegung der Feldmaterie analog durch die Bahnflächen von Feldlinien bestimmt. Die diesbezügliche Flächengeschwindigkeit für das elektrische Elementarfeld ist der zugehörige Vektor der magnetischen Feldstärke.

Der hier behandelte Stoff wurde vom Verfasser das erste Mal bereits in den folgenden Veröffentlichungen behandelt: „Der Mechanismus elektromagnetischer Wellen. I. Ebene Wellen. II. Kugelwellen“². Die Begründung wird aber in der vorliegenden Abhandlung auf eine breitere Basis gestellt, vertieft und erweitert. Das unmittelbar Folgende gibt bloß die Resultate der in den ersten Veröffentlichungen durchgeführten Rechnungen an, woran sich aber wichtige Ergänzungen anschließen.

In der Umgebung der Zentralladung des elektrischen Elementarfeldes weisen die *D*-Linienröhren statt prismatischer oder zylindrischer Gestalt

² Wien. Ber. IIa, 1944. Erscheint aus kriegsbedingten Gründen verspätet.

eine Pyramiden- oder Kegelform auf. Sie verhalten sich elastisch und dynamisch wie eine unhomogene Saite. Ihr physikalisches Verhalten ist dennoch so beschaffen, daß sie transversale Wellen mit der konstanten Lichtgeschwindigkeit c weiterleiten. Doch bleibt dabei die Schwingungsamplitude nicht unverändert wie bei der homogenen Saite, sondern nimmt, von geringfügigen Abweichungen in unmittelbarer Nähe des Ladungszentrums abgesehen, proportional mit dem Zentralabstand zu. Man hat es also in diesen Genauigkeitsgrenzen mit Wellen konstanter Winkelamplitude zu tun.

Abb. 21 zeigt den Zusammenhang zwischen den harmonischen Schwingungen eines punktförmigen Erregers und den entstehenden Wellen bei der homogenen Saite in vier um eine Viertelperiode verschobenen Phasen.

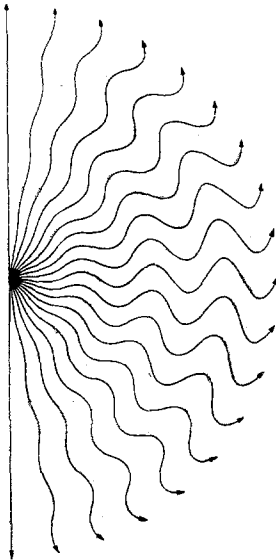


Abb. 23.

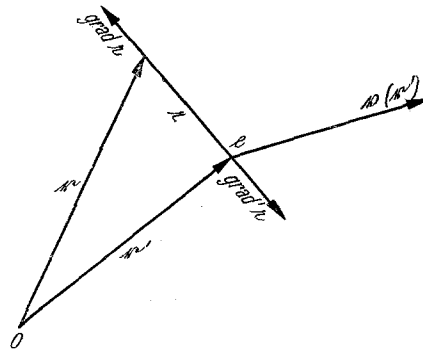


Abb. 24.

Abb. 22 zeigt zu zwei dieser Phasen die abgeänderte Welle in einer Feldlinie, die senkrecht zur Schwingungsrichtung des erregenden Elektrons sich erstreckt. Es ist bemerkenswert, daß das Feld unmittelbar am Zentrum die Bewegungen des Elektrons quasistatisch mitmacht, so daß sich das Anfangsstück der D -Linie parallel zu sich selbst starr mit dem Elektron mitbewegt.

Abb. 23 zeigt für eine Meridianebene durch die Schwingungsachse des Elektrons die in sämtlichen D -Linien auftretenden elektrischen Elementarwellen.

Das dynamische Zusatzfeld zu den statischen und stationären elektrischen Elementarfeldern genügt auch in diesem allgemeinen Falle den *Maxwellschen* Differentialgleichungen der Elektrodynamik für ein strom- und ladungsfreies Gebiet. Durch Hinzufügen der statischen und stationären Elementarfelder werden aber nunmehr diese Gleichungen abge-

ändert. Um dies zu zeigen, müssen zunächst die Differentialgleichungen der statischen und stationären Elementarfelder entwickelt werden.

Abb. 24. Die Ladung e mit dem Ortsvektor r' erzeugt im Aufpunkt mit dem Ortsvektor r , der den Abstand

$$r = \sqrt{(r - r')^2} \quad (40)$$

besitzt, das Potential

$$V(r) = \frac{e}{4\pi r},$$

aus dem man die elektrische Erregung nach der Formel

$$\mathfrak{D}(r) = -\text{grad } V(r) \quad (41)$$

berechnet. Wir setzen eine stationäre Strömung von Elementarladungen mit der Dichte

$$\varrho = \varrho(r')$$

und der Geschwindigkeit

$$v = v(r')$$

voraus, für die daher gilt

$$\text{div}' \{ \varrho v \} = 0. \quad (42)$$

Wir stellen die für ruhende Ladung geltende Formel des Potentials auch für die bewegte Ladung in Rechnung und setzen als Geschwindigkeit der elektrischen Feldlinien die momentane Geschwindigkeit des Ladungszentrums an, indem wir allen Einfluß der Bewegung auf den Verlauf der Feldlinien zum dynamischen Zusatzfeld zählen. Mittels

$$e = \varrho(r') dv'$$

und Integration über den ganzen Raum erhält man so für das skalare Potential

$$V(r) = \int \frac{\varrho(r') dv'}{4\pi r}. \quad (43)$$

Dieses ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta V = -\varrho,$$

die man auch schreiben kann

$$-\text{div grad } V = \varrho.$$

Nach (41) bedeutet dies

$$\text{div } \mathfrak{D} = \varrho. \quad (44)$$

Aus (41) folgt außerdem

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = 0 \quad (45)$$

und

$$\text{rot } \mathfrak{D} = 0. \quad (46)$$

Die nach Abb. 24 mit der Geschwindigkeit $v(r')$ sich bewegende Ladung e erzeugt nach Formel (7) ein Magnetfeld

$$\mathfrak{H}(r) = [v(r'), \mathfrak{D}(r)].$$

Nach (41) erhält man so

$$\mathfrak{H}(r) = \left[\text{grad} \frac{e}{4\pi r}, v(r') \right]$$

und weiter

$$\mathfrak{H}(r) = \text{rot} \frac{e v(r')}{4\pi r}.$$

Man kann also schreiben

$$\mathfrak{H}(r) = \text{rot} \mathfrak{A}(r) \quad (47)$$

mit dem Vektorpotential

$$\mathfrak{A}(r) = \frac{e v(r')}{4\pi r}.$$

Für die stationäre Strömung ist wieder

$$e = \varrho(r') dv'$$

einzuführen und über den ganzen Raum zu integrieren, wodurch man erhält

$$\mathfrak{A}(r) = \int \frac{\varrho(r') v(r')}{4\pi r} dv'. \quad (48)$$

Aus (47) folgert man unmittelbar

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0 \quad (49)$$

und

$$\text{div} \mathfrak{H} = 0. \quad (50)$$

Aus (48) erhält man

$$\text{div} \mathfrak{A}(r) = \frac{1}{4\pi} \int \text{div} \frac{\varrho(r') v(r')}{r} dv'.$$

Man kann umformen

$$\text{div} \frac{\varrho(r') v(r')}{r} = \left(\text{grad} \frac{1}{r}, \varrho(r') v(r') \right) = - \left(\text{grad}' \frac{1}{r}, \varrho(r') v(r') \right)$$

und weiter

$$\text{div} \frac{\varrho(r') v(r')}{r} = - \text{div}' \frac{\varrho(r') v(r')}{r} + \frac{\text{div}' \{ \varrho(r') v(r') \}}{r}.$$

Nach (42) verschwindet der letzte Summand; daher ist

$$\text{div} \mathfrak{A} = - \frac{1}{4\pi} \int \text{div}' \frac{\varrho(r') v(r')}{r} dv'. \quad (51)$$

Zwecks Anwendung des *Gaußschen* Integralsatzes

$$\int \text{div}' \frac{\varrho(r') v(r')}{r} dv' = \oint \left(\frac{\varrho(r') v(r')}{r} df' \right)$$

muß man zunächst von dem in Abb. 25 dargestellten räumlichen Integrationsgebiet ausgehen, das nach außen durch die endliche Hülle H abgeschlossen ist und in dessen Innerem eine kleine Kugel k um die Unstetigkeitsstelle mit dem Ortsvektor r herausgeschnitten ist. Für dieses kann man umformen

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = -\frac{1}{4\pi} \int_H \left(\frac{\varrho(r') v(r')}{r} df' \right) + \frac{1}{4\pi} \int_k (\varrho(r') v(r'), \operatorname{grad}' r) r d\omega.$$

Verläuft die stationäre Strömung der Elementarladungen nur im Endlichen, kommt sie also weder aus dem Unendlichen, noch geht sie wieder ins Unendliche hinaus, so konvergiert das erste Integral gegen Null, wenn man die Hülle H ins Unendliche hinausrücken läßt. Das zweite Integral konvergiert gegen Null, wenn man die Kugel k auf Null zusammenschrumpfen läßt. Der Gaußsche Integralsatz liefert so für den unbeschränkten unendlichen Raum gemäß (51)

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0. \tag{52}$$

Der Ausdruck (48) ist Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta \mathfrak{A} = -\varrho v.$$

Andererseits gilt

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A},$$

was sich wegen (52) zu

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = -\Delta \mathfrak{A}$$

vereinfacht. Die Differentialgleichung des Vektorpotentials läßt sich also auch schreiben

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \varrho v$$

und bedeutet nach (47)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{S} = \varrho v. \tag{53}$$

Für die statischen und stationären Elementarfelder gelten unter den gemachten Voraussetzungen daher die folgenden Differentialgleichungen:

Man hat nach (53) und (45)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{S}^0 = \varrho v, \quad \frac{\partial \mathfrak{D}^0}{\partial t} = 0. \tag{I^0}$$

Nach (46) und (49) gilt

$$\operatorname{rot} \mathfrak{D}^0 = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{S}^0}{\partial t} = 0. \tag{II^0}$$

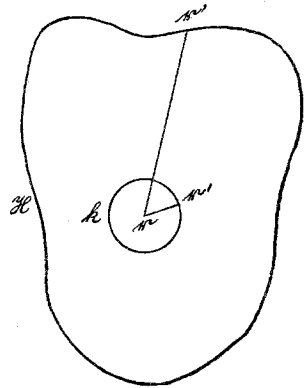


Abb. 25.

Es bedeutet (44)

$$\operatorname{div} \mathfrak{D}^0 = \varrho \quad (\text{III}^0)$$

und (50)

$$\operatorname{div} \mathfrak{H}^0 = 0. \quad (\text{IV}^0)$$

Wie schon oben gesagt wurde, genügt das dynamische Zusatzfeld auch im allgemeinen Falle den Differentialgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H}^* = \frac{\partial \mathfrak{D}^*}{\partial t}, \quad (\text{I}^*)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{D}^* = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial t}, \quad (\text{II}^*)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D}^* = 0, \quad (\text{III}^*)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H}^* = 0. \quad (\text{IV}^*)$$

Durch Addition der mit der gleichen römischen Ziffer bezeichneten Gleichungen erhält man für das Gesamtfeld

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^0 + \mathfrak{D}^*, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^0 + \mathfrak{H}^* \quad (54)$$

das System von Differentialgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{v}, \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{D} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho, \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \quad (\text{IV})$$

Das sind gerade die Grundgleichungen der Elektronentheorie, welche mithin als Folgerung aus der entwickelten Theorie der elektrischen Elementarfelder abgeleitet werden konnte.

Die technische Ausführung der Abbildungen hat mein Assistent, Herr Dr. Ing. *Josef Tomiser* besorgt, der mich auch sonst bei der Drucklegung unterstützte.